2º recupero (metà programma – tutto il programma)
di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
29–02-08 A.A. 2007/2008 Compito (A)

Si scriva il risultato negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (15) – (13) 2) Si consideri la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = H(t-1)\cos(t-1) + H(t-2)\cos(t-2) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

1) (20%) (Si scriva l'equazione in termini di trasformata di Laplace (si suggerisce di avvalersi delle tavole)

Ogni equazione è della forma $y''+\pi^2 y = H(t-a)\cos(t-a)+H(t-b)\cos(t-b)$ ed essendo $\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a)) = e^{-pa}\mathcal{L}(f)$, in trasformata di Laplace l'equazione diventa

$$\mathcal{L}(y) = \frac{py_0 + y_1}{p^2+\pi^2} + \frac{pe^{-pa}}{(p^2+1)(p^2+\pi^2)} + \frac{pe^{-pb}}{(p^2+1)(p^2+\pi^2)}$$

Per il compito D si ha 2π al posto di π.

2) (35%) Si scriva la soluzione $y(t)$ (facendo attenzione a non confondere il ruolo dei vari "scalini")

$$y(t) = (y_0\cos\pi t + \frac{y_1}{\pi}\sin\pi t)H(t) + \big(\frac{1}{\pi^2-1}\cos(t-a) - \frac{1}{\pi^2-1}\cos\pi(t-a)\big)H(t-a)+$$
$$+\big(\frac{1}{\pi^2-1}\cos(t-b) - \frac{1}{\pi^2-1}\cos\pi(t-b)\big)H(t-b)$$

Per il compito D si ha 2π al posto di π.

3) (30%) Si scriva la derivata $y'(t)$ (includendo il ruolo delle delta di Dirac)

$$y'(t) = (-\pi y_0\sin\pi t + y_1\cos\pi t)H(t) + (y_0\cos\pi t + \frac{y_1}{\pi}\sin\pi t)\delta(t)$$
$$+\frac{1}{\pi^2-1}\big(\pi\sin\pi(t-a) - \sin(t-a)\big)H(t-a) + \frac{1}{\pi^2-1}\big(\cos(t-a) - \cos\pi(t-a)\big)\delta(t-a)+$$
$$+\frac{1}{\pi^2-1}\big(\pi\sin\pi(t-b) - \sin(t-b)\big)H(t-b) + \frac{1}{\pi^2-1}\big(\cos(t-b) - \cos\pi(t-b)\big)\delta(t-b) =$$
$$(-\pi y_0\sin\pi t + y_1\cos\pi t)H(t) + \frac{1}{\pi^2-1}\big(\pi\sin\pi(t-a) - \sin(t-a)\big)H(t-a)+$$
$$+\frac{1}{\pi^2-1}\big(\pi\sin\pi(t-b) - \sin(t-b)\big)H(t-b)$$

Per il compito D si ha 2π al posto di π. Il ruolo della $\delta(t)$ va inteso nel modo che segue. La derivata $y'(t)$ è per $t>0$ ($y'(0)=y_1$). Per $t>0$ $\delta(t)$ vale zero e quindi il contributo $(y_0\cos\pi t + \frac{y_1}{\pi}\sin\pi t)\delta(t)$ sparisce.

4) (15%) Si calcolino y_0 e y_1 in modo tale che $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Detti $A = \frac{1}{\pi^2-1}\cos(\frac{\pi}{2}-1) - \frac{1}{\pi^2-1}\cos\pi(\frac{\pi}{2}-1) = \frac{1}{\pi^2-1}\sin 1 + \frac{1}{\pi^2-1}\cos\frac{\pi^2}{2}$
$B = \frac{1}{\pi^2-1}\big(\pi\sin\pi(\frac{\pi}{2}-a) - \sin(\frac{\pi}{2}-a)\big) = -\frac{1}{\pi^2-1}\big(\pi\sin\frac{\pi^2}{2} + \cos 1\big)$
bisogna risolvere il sistema

$$y_0\cos\frac{\pi^2}{2} + \frac{y_1}{\pi}\sin\frac{\pi^2}{2} + A = 0, \quad -y_0\pi\sin\frac{\pi^2}{2} + y_1\cos\frac{\pi^2}{2} + B = 0$$

ossia $y_1 = -A\pi\sin\frac{\pi^2}{2} - B\cos\frac{\pi^2}{2}$ $\quad y_0 = -A\cos\frac{\pi^2}{2} + \frac{B}{2}\sin\frac{\pi^2}{2}$

Problema n.2 (12) 1) (50%) Si scriva la soluzione della seguente equazione integrale:
$\varphi(t) = t + \int_0^t dx\varphi(x)e^{-2(t-x)}$

Detta $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$ si ha $\Phi = \frac{1}{p^2} + \frac{\Phi}{p+2}$ ossia $\Phi = \frac{p+2}{p^2(p+1)}$ e quindi $\varphi = \mathcal{L}^{-1}(\Phi) = 2t - 2e^{-t/2}\sinh\frac{t}{2}$

1.1) (10%) Detta $\varphi(t)$ la soluzione della precedente equazione si dica quanto vale $\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}$ R.: 2.

2) (40%) Si risolva l'equazione integrale. $t^2 = \int_0^t dx\varphi(x)\sin(t-x)$

$\Phi = 2\frac{p^2+1}{p^3}$ e quindi $\varphi(t) = 2 + t^2$

Problema n.3 (13) – (10) 1) (80%) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = e^{-\alpha(x+t)} \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) \equiv 0,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

Non avendo specificato i possibili valori di a, supponiamo che $a \neq \pm 1$ in modo che tutti i denominatori abbiano significato. In trasformata di Laplace si ha $p^2 v(x,p) - a^2 v_{xx} = \frac{e^{-\alpha x}}{p+\alpha}$, $v(0,p) = 0$ ossia $v(x,p) = \frac{e^{-px/a}}{(p+\alpha)(\alpha^2a^2-p^2)} - \frac{e^{-\alpha x}}{(p+\alpha)(\alpha^2a^2-p^2)}$ e quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{e^{-\alpha(t-\frac{x}{a})}}{\alpha^2(a^2-1)} - \frac{1}{2}\frac{e^{\alpha(ta-x)}}{\alpha^2(a^2-1)} - \frac{1}{2}\frac{e^{-\alpha(ta-x)}}{\alpha^2(a^2-1)} + \frac{1}{2}\frac{e^{\alpha(ta-x)}}{\alpha^2a(a^2-1)} - \frac{1}{2}\frac{e^{-\alpha(ta-x)}}{\alpha^2a(a^2-1)} + \\ &- \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{\alpha^2(a^2-1)} + \frac{e^{-\alpha x}}{2a\alpha^2}\Big(\frac{e^{a\alpha t}(a-1)}{a^2-1} + \frac{e^{-a\alpha t}(a+1)}{a^2-1}\Big) = \\ &= \Big(\frac{e^{-\alpha(t-\frac{x}{a})}}{\alpha^2(a^2-1)} - \frac{\cosh\alpha(ta-x)}{\alpha^2(a^2-1)} + \frac{\sinh\alpha(ta-x)}{\alpha^2a(a^2-1)}\Big)H(t-\frac{x}{a}) + \\ &- \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{\alpha^2(a^2-1)} + \frac{e^{-\alpha x}}{a\alpha^2(a^2-1)}(a\cosh(\alpha at) - \sinh(\alpha at))H(t) \end{aligned}$$

3.1) (20%) Si scriva la derivata $u_t(x,t)$ tenendo conto del ruolo di eventuali funzioni tipo δ di Dirac

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \Big(\frac{-e^{-\alpha(t-\frac{x}{a})}}{\alpha(a^2-1)} - \frac{a\sinh\alpha(ta-x)}{\alpha(a^2-1)} + \frac{\cosh\alpha(ta-x)}{\alpha(a^2-1)}\Big)H(t-\frac{x}{a}) + \\ &\Big(\frac{e^{-\alpha(t-\frac{x}{a})}}{\alpha^2(a^2-1)} - \frac{\cosh\alpha(ta-x)}{\alpha^2(a^2-1)} + \frac{\sinh\alpha(ta-x)}{\alpha^2a(a^2-1)}\Big)\delta(t-\frac{x}{a}) + \\ &+ \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha(a^2-1)}(a\sinh(\alpha at) - \cosh(\alpha at))H(t) - \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{\alpha^2(a^2-1)} + \frac{e^{-\alpha x}}{a\alpha^2(a^2-1)}(a\cosh(\alpha at) - \sinh(\alpha at))\delta(t) = \\ &\Big(\frac{-e^{-\alpha(t-\frac{x}{a})}}{\alpha(a^2-1)} - \frac{a\sinh\alpha(ta-x)}{\alpha(a^2-1)} + \frac{\cosh\alpha(ta-x)}{\alpha(a^2-1)}\Big)H(t-\frac{x}{a}) + \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha(a^2-1)}(a\sinh(\alpha at) - \cosh(\alpha at))H(t) \end{aligned}$$

Problema n.4 (7) 4.1) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=1} dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{2}{z^2}} + e^{\frac{1}{z^3}})$.

L'integrale è dato da $2\pi i Resf(0)$ e quindi bisogna effettuare lo sviluppo di Laurent in $z = 0$ essendo $z = 0$ una singolarità essenziale. Lo sviluppo, scrivendo la funzione come $(1+z+z^2)(e^{\frac{a}{z}} + e^{\frac{b}{z^2}} + e^{\frac{c}{z^3}})$, è dato da $(1+z+z^2)(\sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{z^k k!} + \sum_{k=0}^\infty \frac{b^k}{z^{2k}k!} + \sum_{k=0}^\infty \frac{c^k}{z^{3k}k!})$ e quindi $I = 2\pi i(a+b+c+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{6})$ da cui A.: $i\pi\frac{28}{3}$ B.: $\pi i\frac{4}{3}$, C.: $\pi i\frac{16}{3}$, D.: $\pi i\frac{14}{3}$

4.2) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=3} dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z^2}} + e^{\frac{2}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})$.

$I = 2\pi i(Resf(0) + Resf(1) + resf(2))$. Per trovare il residuo in $z = 0$ si procede come prima. Per trovare il residuo in $z = 1$ si scrive $1+z+z^2 = 3+3(z-1)+(z-1)^2$ mentre per trovare il residuo in $z = 2$ si scrive $1+z+z^2 = 7+5(z-2)+(z-2)^2$. Scrivendo poi la funzione come $(1+z+z^2)(e^{\frac{a}{z}} + e^{\frac{b}{z^2}} + e^{\frac{d}{z-1}} + e^{\frac{q}{z-2}})$ si ottiene $Resf(0)+Resf(1)+Resf(2)=a+b+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{3}+3d+\dfrac{sd^2}{2}+\dfrac{d^3}{6}+7q+\dfrac{5q^2}{2}+\dfrac{q^3}{6}$ da cui si ottiene A.: $\pi i\frac{154}{3}$, B.: $\pi i\frac{149}{3}$, C.: $22\pi i$, D.: $\pi i\frac{128}{3}$

Problema n.5 `(10)` Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x+2)(x^2+1)}dt.$

Scrivendo l'integrale come $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x+a)(x^2+b^2)}dt$ $(a>0)$ si ha $I=\pi i(Resf(-a)+Resf(ib)+Resf(-ib))$ ossia $I=\pi i(\dfrac{\sqrt{|a|}\sqrt{e^{i\pi}}}{b^2+a^2}+\dfrac{\sqrt{b}\sqrt{e^{i\pi/2}}}{2ib(ib+a)}+\dfrac{\sqrt{b}\sqrt{e^{i3\pi/2}}}{-2ib(a-ib)}$ ed eseguendo i calcoli si ottiene $I=-\pi\dfrac{\sqrt{|a|}}{b^2+a^2}+\dfrac{(a+b)\sqrt{2}}{2\sqrt{b}(a^2+b^2)}\pi$ da cui A.: $\pi\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, B.: $\pi\dfrac{2-\sqrt{2}}{8}$, C.: $\dfrac{\pi}{10}$, D.: $\pi\dfrac{1}{20}$

2º recupero (metà programma – tutto il programma)
di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
29–02-08 A.A. 2007/2008 Compito (B)

Si scriva il risultato negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (15) – (13) 1) Si consideri la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = H(t-1)\cos(t-1) + H(t-4)\cos(t-4) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$
1) (20%) Si scriva l'equazione in termini di trasformata di Laplace (si suggerisce di avvalersi delle tavole)

2) (35%) Si scriva la soluzione $y(t)$ (facendo attenzione a non confondere il ruolo dei vari "scalini")

3) (30%) Si scriva la derivata $y'(t)$ (includendo il ruolo delle delta di Dirac)

4) (15%) Si calcolino y_0 e y_1 in modo tale che $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = 0$

Sia $A = \dfrac{1}{\pi^2 - 1}(\cos\pi^2 - \cos 1)$, $\qquad B = \dfrac{1}{\pi^2 - 1}(\sin 1 - \pi\sin\pi^2)$ bisogna risolvere il sistema

$$y_0 \cos\pi^2 + \frac{y_1}{\pi}\sin\pi^2 + A = 0, \qquad -y_0\pi\sin\pi^2 + y_1\cos\pi^2 + B = 0$$

ossia $y_1 = -A\pi\sin\pi^2 - B\cos\pi^2 \quad y_0 = -A\cos\pi^2 + \dfrac{B}{\pi}\sin\pi^2$

Problema n.2 (12) 1) (50%) Si scriva la soluzione della seguente equazione integrale:
$\varphi(t) = t + \displaystyle\int_0^t dx\varphi(x)e^{-3(t-x)}$

$\Phi = \dfrac{p+3}{p^2(p+2)}$ da cui $\varphi(t) = \dfrac{3}{2}t - \dfrac{1}{2}e^{-t}\sinh t$

1.1) (10%) Detta $\varphi(t)$ la soluzione della precedente equazione si dica quanto vale $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) - \frac{3}{2}t$ R.: $-1/4$.

2) (40%) Si risolva l'equazione integrale. $t = \displaystyle\int_0^t dx\varphi(x)\cos(t-x)$

$\Phi = \dfrac{p^2+1}{p^3}$ da cui $\varphi(t) = 1 + \dfrac{1}{2}t$

Problema n.3 (13) – (10) 1) (80%) Si risolva la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = e^{-2x-2t} \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) \equiv 0,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$
3.1) (20%) Si scriva la derivata $u_t(x,t)$ tenendo conto del ruolo di eventuali funzioni tipo δ di Dirac

Problema n.4 (7) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=1} dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{-2}{z^2}} + e^{\frac{1}{z^3}})$.

4.2) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=3} dz(1+z+z^2)(e^{-\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z^2}} + e^{\frac{2}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})$.

Problema n.5 (10) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+2)(x^2+4)}dt$.

$2^{\underline{o}}$ recupero (metà programma – tutto il programma)
di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
29–02-08 A.A. 2007/2008 Compito (C)

Si scriva il risultato negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (15) – (13) Si consideri la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = H(t-2)\cos(t-2) + H(t-4)\cos(t-4) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$
1) (20%) Si scriva l'equazione in termini di trasformata di Laplace (si suggerisce di avvalersi delle tavole)

2) (35%) Si scriva la soluzione $y(t)$ (facendo attenzione a non confondere il ruolo dei vari "scalini")

3) (30%) Si scriva la derivata $y'(t)$ (includendo il ruolo delle delta di Dirac)

4) (15%) Si calcolino y_0 e y_1 in modo tale che $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = 0$

Sia $A = \frac{1}{\pi^2 - 1}(-\cos\pi^2 - \cos 2)$, $\qquad B = \frac{1}{\pi^2-1}(\sin 2 + \pi \sin\pi^2)$ bisogna risolvere il sistema
$$\frac{y_1}{\pi}\sin\pi^2 + y_0\cos\pi^2 + A = 0, \qquad y_1\cos\pi^2 - y_0\pi\sin\pi^2 + B = 0$$
ossia $y_1 = -A\pi\sin\pi^2 - B\cos\pi^2 \quad y_0 = -A\cos\pi^2 + \frac{B}{\pi}\sin\pi^2$

Problema n.2 (12) 1) (50%) Si scriva la soluzione della seguente equazione integrale:
$\varphi(t) = t + \int_0^t dx\varphi(x)e^{-4(t-x)}$

$\Phi = \frac{p+4}{p^2(p+3)}$ da cui $\varphi(t) = \frac{4}{3}t - \frac{2}{9}e^{-3t/2}\sinh\frac{3}{2}t$

1.1) (10%) Detta $\varphi(t)$ la soluzione della precedente equazione si dica quanto vale $\lim_{t\to+\infty}(\varphi(t) - \frac{e^{-3t}}{9})t^{-1}$ R.: 4/3.

2) (40%) Si risolva l'equazione integrale. $t^2 = \int_0^t dx\varphi(x)\sinh(t-x)$

$\Phi = 2\frac{p^2-1}{p^3}$ da cui $\varphi(t) = 2 - t^2$

Problema n.3 (13) – (10) 1) (80%) Si risolva la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = e^{-3x-3t} \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) \equiv 0, \ u(0,t) = 0 \end{cases}$$
3.1) (20%) Si scriva la derivata $u_t(x,t)$ tenendo conto del ruolo di eventuali funzioni tipo δ di Dirac

Problema n.4 (7) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=1} dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{2}{z^2}} + e^{\frac{-1}{z^3}})$.

4.2) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=3} dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z^2}} + e^{\frac{-2}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})$.

Problema n.5 (10) Si calcoli l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x^2+4)}dt$.

2º recupero (metà programma – tutto il programma)
di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
29–02-08 A.A. 2007/2008 Compito (D)

Si scriva il risultato negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (15) – (13) Si consideri la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} y''+4\pi^2 y = H(t-1)\cos(t-1)+H(t-2)\cos(t-2) \\ y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_1 \end{cases}$$
1) (20%) Si scriva l'equazione in termini di trasformata di Laplace (si suggerisce di avvalersi delle tavole)

2) (35%) Si scriva la soluzione $y(t)$ (facendo attenzione a non confondere il ruolo dei vari "scalini")

3) (30%) Si scriva la derivata $y'(t)$ (includendo il ruolo delle delta di Dirac)

4) (15%) Si calcolino y_0 e y_1 in modo tale che $y(\frac{\pi}{2})=0$ e $y'(\frac{\pi}{2})=0$

Sia $A=\frac{1}{4\pi^2-1}(-\cos\pi^2+\sin 1)$, $\quad B=\frac{1}{4\pi^2-1}(-\cos 1-2\pi\sin\pi^2)$ bisogna risolvere il sistema

$$\frac{y_1}{2\pi}\sin\pi^2+y_0\cos\pi^2+A=0, \qquad y_1\cos\pi^2-2y_0\pi\sin\pi^2+B=0$$

ossia $y_1=-2A\pi\sin\pi^2-B\pi\cos\pi^2 \quad y_0=-A\cos\pi^2+\frac{B}{2\pi}\sin\pi^2$

Problema n.2 (12) 1) (50%) Si scriva la soluzione della seguente equazione integrale:
$\varphi(t)=t+\int_0^t dx\varphi(x)e^{-5(t-x)}$

$\Phi=\frac{1}{p^2}\frac{p+5}{p+4}$ da cui $\varphi(t)=\frac{5}{4}t-\frac{1}{8}e^{-2t}\sinh(2t)$

2) (10%) Detta $\varphi(t)$ la soluzione della precedente equazione si dica quanto vale $\lim_{t\to+\infty} e^{5t}\varphi(t)$ R.: $+\infty$

2) (40%) Si risolva l'equazione integrale. $t=\int_0^t dx\varphi(x)\cosh(t-x)$

$\Phi=\frac{p^2-1}{p^3}$ da cui $\varphi(t)=1-\frac{1}{2}t^2$.

Problema n.3 (13) – (10) (80%) 1) Si risolva la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-4x-4t} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$$

3.1) (20%) Si scriva la derivata $u_t(x,t)$ tenendo conto del ruolo di eventuali funzioni tipo δ di Dirac

Problema n.4 (7) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=1} dz(1+z+z^2)(e^{-\frac{1}{z}}+e^{\frac{2}{z^2}}-e^{\frac{1}{z^3}})$.

4.2) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=3} dz(1+z+z^2)(e^{-\frac{1}{z}}+e^{\frac{-1}{z^2}}+e^{\frac{2}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}})$.

Problema n.5 (10) Si calcoli l'integrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x+4)(x^2+4)}dt$.